1099. 可換デナイ Operator Ring ノ スペクトル分解ニ就テ, III

小平　邦彦（東京文理大）

§3　I型ノ環ノ構造

3.1. $\mathbb{M}$ ヲ $\mathfrak{H}$ ノI型ノ operator ring トスル．然ルトキハ定理9ニヨレバ $\mathfrak{H}$ ハ $\sum \oplus \mathfrak{H}_{\mathrm{I}(n,m)}$ ノ形ニ分解サレ，コレニ従ッテ $\mathbb{M}$ モ $C(\mathbb{M})$ モ両側 ideal ノ直和ニ分タレル．故ニI型ノ環ノ構造ヲ論ズルニハ $\mathfrak{H}$ ガ唯一ツノ部分 $\mathfrak{H}_{\mathrm{I}(n,m)}$ カラ成ル場合ヲ考ヘレバ充分デアル。

$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{\mathrm{I}(n,m)}$ トスレバ

$$\begin{cases} \text{Range } D_{\mathbb{M}} = (H;\ H\text{ハ整},\ 0 \leqq H \leqq n) \\ \text{Range } D_{C(\mathbb{M})} = (H;\ H\text{ハ整},\ 0 \leqq H \leqq m) \end{cases}$$

デアル．故ニ

$$D_{\mathbb{M}}(E_j) = 1, \quad E_j \cdot E_k = 0 \ (j \neq k), \quad \sum E_j = 1$$

ナル $\mathbb{M}$ ノ n 個ノ projection E_j，及ビ

$$D_{\mathbb{M}}(F_k) = 1, \quad F_j \cdot F_k = 0 \ (j \neq k), \quad \sum F_j = 1$$

ナル $C(\mathbb{M})$ ノ m 個ノ projection F_j ガ存在スル．従ッテ定理12ニヨッテ $\mathfrak{H}$, $\mathbb{M}$, $C(\mathbb{M})$ ハ

$$\mathfrak{H} = n \times \overline{\mathfrak{H}} \times m, \quad \mathbb{M} = n \times \overline{\mathbb{M}}, \quad \mathbb{M}^c = \overline{\mathbb{M}}^c \times m$$

ナル形ニ現ハサレル. $\bar{\mathfrak{h}}$ハ

$$\bar{\mathfrak{h}} \cong \mathfrak{h}_{(E_\nu \bar{F}_\rho)}$$

デアッテ, コノ *spatially isomorphism* ニヨッテ

$$\begin{cases} \bar{\mathbb{M}} \cong \mathbb{M}_{(E_\nu F_\rho)}, \\ \bar{\mathbb{M}}^c \cong \mathbb{M}^c_{(E_\nu \bar{F}_\rho)}, \\ \bar{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_{(E_\nu F_\rho)} \end{cases}$$

トナル.[2)] 定理11ニヨレバ $\mathbb{M}_{(E_\nu F_\rho)} \cong \mathbb{M}_{(E_\nu)}$ デアッテ,

$\mathbb{M}_{(E_\nu F_\rho)}$ ニ関スル *dimension* ハ

$$D(E_{(E_\nu F_\rho)}) = D_{\mathbb{M}}(E)_{(E_\nu F_\rho)}, \quad E \in E_\nu \mathbb{M} E_\nu$$

デ與ヘラレル. 然ルニ $D_{\mathbb{M}}(E_\nu) = 1$, スナハチ E_ν ハ 1 ニ於テ最小デアルカラ, $E \in E_\nu \mathbb{M} E_\nu$ ニ對シテハ $D_{\mathbb{M}}(E) = E_z$ デナケレバナラナイ. 故ニ

$$D(E_{(E_\nu F_\rho)}) = (E_z)_{(E_\nu F_\rho)}$$

容易ニ示サレル如ク $(E_z)_{(E_\nu F_\rho)} = (E_{(E_\nu F_\rho)})_z$ デアル.

故ニ $\bar{\mathbb{M}}$ ガ $\mathbb{M}_{(E_\nu F_\rho)}$ ニ *isomorphic* ナルコトニヨッテ

$$D_{\bar{\mathbb{M}}}(\bar{E}) = \bar{E}_z$$

ナルコトガワカル. コレハ $\bar{\mathbb{M}}$ ガ I_1 ナル型ヲモツ事ヲ示シテ

---

2) $\bar{\mathbb{Z}}$ ハ $\bar{\mathbb{M}}$ ノ center ヲ現ハス: $\bar{\mathbb{Z}} = \bar{\mathbb{M}} \cap \bar{\mathbb{M}}^c$

キル. 同様ニシテ $\overline{\mathbb{M}}^c$ モ I_1 型デアル. 従ッテ $\overline{\mathbb{M}}$, $\overline{\mathbb{M}}^c$ 内ノ *projection* ハスベテ $\overline{\mathbb{Z}}$ ニ含マレル. 一般ニ *hermitic operator* ハ *projection* ノ一次結合ノ極限ト考ヘラレル. 故ニ $\overline{\mathbb{M}}$ 及ビ $\overline{\mathbb{M}}^c$ ニ含マレル *hermitic operator* ハ $\overline{\mathbb{Z}}$ ニ属スル.

今マデ述ベテ来タ理論ハ實 *Hilbert* 空間ニ於テモ成立スル. コヽデシバラク $\mathfrak{h}$ ハ複素 *Hilbert* 空間デアルトシヨウ. 複素 *Hilbert* 空間デハ *operator Ring* ハソノ *projection* デ生成サレル. 故ニ

$$\overline{\mathbb{M}} = \overline{\mathbb{M}}^c = \overline{\mathbb{Z}}$$

デアル. 従ッテ $D_{\overline{\mathbb{M}}} = D_{C\overline{\mathbb{M}}} = D_{\overline{\mathbb{Z}}}$ デアルカラ, 定理8ニヨッテ

$$\overline{\mathfrak{h}} = [\,\overline{\mathbb{Z}}\,\bar{f}\,]$$

ナル $\bar{f}$ ガ存在スル. $\mathbb{Z}_{(E\vee F\rho)} \cong \mathbb{Z}$ ナル故,

$$\overline{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}$$

デアル. 従ッテコノ同型對應デ $A \in \mathbb{Z}$ ニ對應スル $\overline{\mathbb{Z}}$ ノ元ヲ $\bar{A}$ トスレバ, $\bar{A}$ ハ

$$\bar{A} = \int_{\Omega} z(\lambda)\,\overline{E(d\lambda)}$$

ナル形ニ現ハサレル.[3)]

---

3) 吾々ハ§1デ $\mathbb{Z}$ ノ *projection* ノ作ル *Boole* 代数ヲ *measure space* $(\Omega; m)$ ノ可測集合束ガ表現シタ. コレデソレヲ採用スル. $E(\Gamma)$ ハコノ表現ニ於テ(次頁ニ續ク)

$\|\overline{E(\Gamma)}\,\overline{f}\|^2$ ハ明ラカニ Γ ノ絶對連續ナ集合函數デ $\overline{\mathfrak{h}_y}$ ガ $[\overline{\mathbb{Z}}\ \overline{f}]$ ト表ハサレテキルコトカラ知ラレル如ク，$\|\overline{E(\Gamma)}\,\overline{f}\|^2 = 0$ ナラバ $\overline{E(\Gamma)} = 0$，從ッテ $m(\Gamma) = 0$ デナケレバナラヌ．故ニ

$$\|\overline{E(\Gamma)}\,\overline{f}\|^2 = \int_{\Gamma} (w(\lambda))^2\, d\lambda$$

ナル到ル所 $w(\lambda) > 0$ ナ函數 $w(\lambda)$ ガ存在スル．コレヲ用ヒテ

$$\overline{\varphi} = \int_{\Omega} \frac{1}{w(\lambda)}\, \overline{E(d\lambda)}\, \overline{f}$$

ヲ作ル．然ルトキハ，明ラカニ $[\overline{\varphi}]_z = 1$ デアルカラ

$$\overline{\mathfrak{h}_y} = [\overline{\mathbb{Z}}\ \overline{\varphi}]$$

デアッテ

$$\|\overline{E(\Gamma)}\,\overline{\varphi}\|^2 = m(\Gamma)$$

ガ成立スル。

$$\overline{A} = \int z(\lambda)\, \overline{E(d\lambda)}$$

トスレバ

$$\|\overline{A}\,\overline{\varphi}\|^2 = \int_{\Omega} |z(\lambda)|^2\, d\lambda$$

デアル．從ッテ $\overline{A}\,\overline{\varphi} \to z(\lambda)$ ニヨッテ $\overline{\mathbb{Z}}\,\overline{\varphi}$ ハ Ω ノ上ノ

(前頁ヨリ)
可測集合 Γ ニ對應スル projection ヲ表ハスノデアル。

§1. 參照。

m－平方可積分函數ノ作ルHilbert空間 $\mathfrak{H}_\Omega$ = isometric = 寫サレル．故ニ $\overline{\mathfrak{H}}-[\,\overline{\mathbb{Z}}\ \overline{\varphi}\,]\cong\mathfrak{H}_\Omega$ デアル．スナハチ

$$\overline{\mathfrak{H}}=\mathfrak{H}_\Omega$$

ト考ヘラレル．$\overline{\mathrm{B}}=\int b(\lambda)\,\mathrm{E}(d\lambda)$ トスレバ，コノトキ

$$\overline{\mathrm{B}}\,(\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\varphi})=(\overline{\mathrm{B}}\,\overline{\mathrm{A}})\,\overline{\varphi}\longrightarrow b(\lambda)\,z(\lambda)$$

デアル．故ニ $\overline{\mathfrak{H}}=\mathfrak{H}_\Omega$ ト考ヘレバ $\overline{\mathrm{A}}$ ハ

$$\overline{\mathrm{A}}=z(\lambda)\times$$

デ表ハサレルコトガ分ル．結果ヲマトメレバ次ノ定理ガ得ラレル：

定理 13. $\mathbb{M}$ ガ I 型ノ operator ring ナルトキ，$\mathfrak{H}$ ハ $\mathbb{M}$ ト $\mathrm{C}(\mathbb{M})$ ニ関シテ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\oplus\,\mathfrak{H}(n,m)$ ノ形ニ分解サレ，コレニ從ッテ $\mathbb{M}$，$\mathrm{C}(\mathbb{M})$ 及ビ $\mathbb{Z}$ ハ "両側イデアル" ノ和：

$$\begin{cases}\mathbb{M}=\sum\sum\oplus\,\mathbb{M}\,(n,m),\\ \mathrm{C}(\mathbb{M})=\sum\sum\oplus\,\mathrm{C}(\mathbb{M})\,(n,m),\\ \mathbb{Z}=\sum\sum\oplus\,\mathbb{Z}\,(n,m)\end{cases}$$

ニ分タレル．コノ一ツノ部分 $\mathfrak{H}(n,m)$ ヲトッテ $\mathbb{Z}(n,m)$ ノ projection ノ作ルBoole代數ヲ表現スル measure space ヲ $\Omega(n,m)$ トスレバ

$$\mathfrak{H}\,(n,m)=n\times\overline{\mathfrak{H}}\times m,$$
$$\overline{\mathfrak{H}}=\mathfrak{H}_{\Omega(n,m)}$$

デアッテ，$Z(\lambda)$メナル形ノ$\overline{\mathfrak{H}}$ノoperatorノ作ルabelian ringヲ$\overline{\mathbb{Z}}$トスレバ

$$\mathbb{M}(n, m) = n \times \overline{\mathbb{Z}}$$

$$C(\mathbb{M})(n, m) = \overline{\mathbb{Z}} \times m$$

デアル。

3.2. コノ節デハ$\mathfrak{H}$ガ實Hilbert空間ナル場合ニ$\overline{\mathfrak{H}}$ニ於ケルI，型ノ環$\overline{\mathbb{M}}$及ビ$\overline{\mathbb{M}}^c$ノ構造ヲ定メルコトヲ問題トスル．簡単ノタメ$\overline{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}$, $\overline{\mathbb{M}} = \mathbb{M}$, $\overline{\mathbb{M}}^c = \mathbb{M}^c$, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$トオキ，$\mathbb{Z}$ノprojectionヲmeasure space Ωノ可測集合Γヲ用ヒテ$E(\Gamma)$ト現ハス。

Lemma 2.1 $[f]_{\mathbb{Z}} = 1$ナルトキ

$$[\mathbb{Z}\varphi] = [\mathbb{Z}f], \quad \|E(\Gamma)\varphi\|^2 = m(\Gamma)$$

ナルφガ存在スル。

證明: 1節ニ於テ$\bar{f}$カラ$\bar{\varphi}$ヲ作ッタノト同ジ方法デfカラφヲ作レバ，φハ明ラカニ求ムルモノデアル（證明終）

吾々ハ$\|E(\Gamma)\varphi\|^2 = m(\Gamma)$ナルトキ$\varphi$ハunitaryデアルトイフコトニスル．—— $\mathbb{M}$ノhermitic operatorハスベテ$\mathbb{Z}$ニ含マレル．故ニ，$A \in \mathbb{M}$ニ對シテ

$$|A| = \sqrt{A^* A}$$

ニヨッテ$|A|$ヲ定義スレバ，$|A| \in \mathbb{Z}$デアル．ソコデ

$$|A| = \int_{\Omega} a_A(\lambda)\, E(d\lambda)$$

トオク．コレニ對シテ $f \in \mathfrak{H}$ ガ任意ニ與ヘラレタトキ

$$\| E(\Gamma) f \|^2 = \int \{ a_f(\lambda) \}^2 E(d\lambda), \quad a_f(\lambda) \geqq 0$$

ニヨッテ $a_f(\lambda)$ ヲ定義スル．φ ガ unitary ナルトキハ明ラカニ

$$a_{A\varphi}(\lambda) = a_A(\lambda)$$

デアル．從ッテ $a_{A\varphi}(\lambda)$ ハ有界ナルコトガ分ル。

Unitary ナル φ ヲ一ツ定メテ φ_0 トスル．$[\varphi_0]_Z = 1$ デアルカラ，$B \in \mathbb{Z}$ ガ $B\varphi_0 = 0$ ヲ滿足スルナラバ $B = 0$ デナケレバナラヌ。故ニ，$A\varphi_0 = 0$ ナラバ $A^*A\varphi_0 = 0$ デ $A^*A \in \mathbb{Z}$ デアルカラ，$A = 0$ ナルコトガ分ル．從ッテ $A \to A\varphi_0$ ニヨッテ $A \in \mathbb{M}$ ト $A\varphi_0 \in \mathbb{M}\varphi_0$ ガ一對一ニ對應スル．$f = A\varphi_0$ ナラバ既ニ述ベタ如ク $a_f(\lambda)$ ハ有界デアル．逆ニ：

Lemma 2.2. $a_f(\lambda)$ ガ有界ナル f ハ $A \in \mathbb{M}$ ナル A ヲ用ヒテ $f = A\varphi_0$ ト表ハサレル．

證明.[4] $[\varphi_0]_Z = 1$ デアルカラ $\mathbb{M}^c$ ガ I_1 ニ屬スルコトニヨッテ $\mathfrak{H} = [\mathbb{M}\varphi_0]$ デアル．故ニ $\lim A_j\varphi_0 = f$ ナル $A_j \in \mathbb{M}$ ガ存在スル．

A_j ヲ例ヘバ $\| A_j\varphi_0 - A_{j+k}\varphi_0 \| < \dfrac{1}{2^j}$ ナル様ニ選ンデオケバ

4) §2. *lemma* 1.8 ノ證明参照．

$$\|(|A_j - A_{j+k}|\varphi_0)\|^2$$

$$=\int_\Omega |a_{A_j - A_{j+k}}(\lambda)|^2 d\lambda < \frac{1}{4^j}$$

トナル. 従ッテ

$$\Gamma_\nu = \sum_{j>\nu} \sum_k{}^{\cup} (\lambda ; |a_{A_j - A_{j+k}}(\lambda)|^2 \geqq \frac{1}{2^j})$$

トオクト, $m(\Gamma_\nu) < \dfrac{1}{2^{\nu-1}}$ デアッテ, $\lambda \notin \Gamma_\nu$ ナラバ

$a_{A_j - A_{j+k}}(\lambda)$ ハ $j \to \infty$ ノトキ一様ニ収斂スル. 故ニ

$$E_\nu = 1 - E(\Gamma_\nu)$$

トオケバ, $A_j E_\nu$ ハ $j \to \infty$ ノトキ *uniform topology* ノ意味デ収斂スル. コノ極限ヲ A_ν トスレバ明ラカニ $A_\nu \in \mathbb{M}$ デアッテ

$$A_\nu \varphi_0 = \lim_j A_j E_\nu \varphi_0 = E_\nu f$$

デアル. コノコトカラ

$$a_{A_\nu}(\lambda) = \begin{cases} a_f(\lambda), & \lambda \notin \Gamma_\nu \\ 0, & \lambda \in \Gamma_\nu \end{cases}$$

ナルコトガ分ル. 従ッテ $a_f(\lambda) \leqq C < +\infty$ ナル如クCヲ定メレバ任意ノ $h \in \mathfrak{H}$ ニ對シテ

$$\|A_{\nu+\mu} h - A_\nu h\|^2 \leqq C^2 \|E_{\nu+\mu} h - E_\nu h\|^2$$

ガ成立スル．又明ラカニ $|||A_\nu||| \leqq C$ デアル．故ニ A ハ strong topology ノ意味デアル $\mathbb{M}$ ノ元 A ニ収斂スル．而シテ明ラカニ

$$f = A\varphi_0$$

デアル（証明終）

$\mathbb{Z}$ ト $C(\mathbb{Z})$ ニ関シテ定理9ヲ適用スレバ，$\mathbb{Z}$ ハ I_1 型デアルカラ，$\mathfrak{h} = \sum \oplus \mathfrak{h}_n$ ノ形ニ分解サレ，$C(\mathbb{Z})$ ハ各 $\mathfrak{h}_n$ ニ於イテ夫々 I_n 型ニ属シテキル．$\mathfrak{h}_{\mathrm{I}}$ ニ於ケル $\mathbb{M}$ 及ビ $C(\mathbb{M})$ ノ構造ハ明ラカデアル．$\mathfrak{h}_n$ ノ projection ヲ E_n トスレバ，スナハチ $C(\mathbb{Z})_{(E_1)} = \mathbb{Z}_{(E_1)}$ デアルカラ，

$$\mathbb{M}_{(E_1)} = \mathbb{M}^c_{(E_1)} = \mathbb{Z}_{(E_1)}$$

$\mathfrak{h}_n$ ノ部分ヲ考ヘルタメニ簡単ノタメ $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_n$ トシヨウ．然ルトキハ $\mathfrak{h}$ ハ1ニ於テ $C(\mathbb{Z})$ ニ関シ最小ナル個ノ $\mathfrak{m}_j$ ノ和ニ分タレル．

$$\mathfrak{h} = \sum_{0 \leqq j < n} \oplus\, \mathfrak{m}_j$$

$\mathfrak{m}_j$ ハ定理8ニヨレバ $\mathfrak{m}_j = [\mathbb{Z} f_j]$ ト書カレル．$(\mathfrak{m}_j)_z = 1$ デアルカラ $[f_j]_z = 1$，従ッテ lemma 2.1 ニヨッテ

$$\mathfrak{m}_j = [\mathbb{Z}\varphi_j] \qquad \varphi_j \text{ ハ unitary}$$

トシテヨイ．明ラカニ $a\varphi_j(\lambda) = 1$ デアル．故ニ lemma 2.2 ニヨレバ

2.2 ニヨレバ

$$\varphi_j = U_j \varphi_0, \qquad U_j \in \mathbb{M}$$

ナル U_j ガ存在スル. 然ルニ

$$a_{U_j}(\lambda) = a_{\varphi_j}(\lambda) = 1$$

デアルカラ

$$U_j^* U_j = \int \{a_{U_j}(\lambda)\}^2 E(d\lambda) = 1,$$

即チ U_j ハ unitary デアル.

U_0 ハ明ラカニ 1 デアル. $j \neq k$ トスレバ, $[\mathbb{Z}\varphi_j]$ ト $[\mathbb{Z}\varphi_k]$ ガ直交シテヰルカラ, $A \in \mathbb{Z}$ ヲ任意ニトッタトキ

$$(AU_j\varphi_0, U_k\varphi_0) = 0$$

デアル。故ニ

$$(A(U_k^* U_j + U_j^* U_k)\varphi_0, \varphi_0) = 0$$

然ルニ $U_k^* U_j + U_j^* U_k$ ハ hermitic デアルカラ $\mathbb{Z}$ ニ含マレル.

従ッテ $A = U_k^* U_j + U_j^* U_k$ トオイテ見レバ

$$U_j^* U_j + U_j^* U_k = 0$$

ナル事ガ知ラレル. コノデ特ニ $k=0$ トスレバ

$$U_j^* = -U_j, \quad 或ハ \quad U_j^2 = -1 \qquad (j \neq 0)$$

ガ得ラレル. 従ッテ k, j ガ共ニ $\neq 0$ ナラバ

$$U_j U_k = -U_k U_j$$

デアル.

$n<+\infty$ デアルトスル. スルト $[\mathbb{M}\varphi_0]=\sum\oplus[\mathbb{Z}\varphi_j]$ カラ

$$\mathbb{M}=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}U_1+\cdots\cdots+\mathbb{Z}U_{n-1}$$

ナルコトが示サレル. $f=A\varphi_0$, $A\in\mathbb{M}$ トスレバ $a_f(\lambda)$ ハ有界デアル. 従ッテ

$$\|E(\Gamma)P_{[\mathbb{Z}\varphi_j]}f\|^2\leqq\|E(\Gamma)f\|^2$$

デアルカラ, $f=P_{[\mathbb{Z}\varphi_j]}f$ トオケバ $a_{f_j}(\lambda)$ モ有界デナケレバナラヌ. 然ルニ Lemma 2.2 カラ明ラカナル如ク, 一般ニ φ が unitary ナルトキ, $g\in[\mathbb{Z}\varphi]$ が有界ナ $a_g(\lambda)$ ヲ有スルナラバ $g\in\mathbb{Z}\varphi$ デアル.[5] 故ニ $f_j=B_j\varphi_j$, $B_j\in\mathbb{Z}$ ナル B_j が存在スル. 従ッテ $A\varphi_0=\sum f_j=\sum B_j\varphi_j$ $=\sum B_jU_j\varphi_0$ デアルカラ

$$A=\sum B_jU_j,\qquad B_j\in\mathbb{Z}$$

デアル ——

$n=1$ ノ場合ハ済ンデヰルカラ $n>1$ トスル. $n=2$ トスレバ $\mathbb{M}=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}U_1$ トナリ, $\mathbb{M}$ ハ abelian トナッテ center が $\mathbb{Z}$ ナルコトニ矛盾スル. 故ニ $\mathbb{M}$ ハ少クトモ U_1 ト U_2 ヲ含ム. U_1 ト U_2 カラ $U=U_1U_2$ ヲ作ル. U ハ unitary デアッテ

---

5) Lemma 2.2 ニ於テ $\mathbb{M}$ ヲ $\mathbb{Z}$ デ置換ヘ $\mathfrak{H}=[\mathbb{Z}\varphi]$ ト考ヘレバヨイ。

$$\mathcal{U}^*\mathcal{U}_j + \mathcal{U}_j^*\mathcal{U} = 0 \qquad (j = 0, 1, 2)$$

ヲ満足スル．従ツテ $\mathbb{Z}$ ノ operator ハスベテ hermitic デアルカラ，任意ノ $A, B \in \mathbb{Z}$ ニ對シテ

$$\begin{aligned} &2(A\mathcal{U}\varphi_0, B\mathcal{U}_j\varphi_0) \\ &\quad = (\varphi_0, AB(\mathcal{U}^*\mathcal{U}_j + \mathcal{U}_j^*\mathcal{U})\varphi_0) = 0 \end{aligned}$$

ガ成立スル．スナハチ $[\mathbb{Z}\,\mathcal{U}\varphi_0] \perp [\mathbb{Z}\,\mathcal{U}_j\varphi_0]$ デアル．故ニ $n \geqq 4$ デアッテ，$\mathcal{U} = \mathcal{U}_3$ ト考ヘテヨイコトガ分ル．

$\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$ ハ

$$\begin{cases} \mathcal{U}_1^2 = \mathcal{U}_2^2 = \mathcal{U}_3^2 = -1, \\ \mathcal{U}_1\mathcal{U}_2 = -\mathcal{U}_2\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_3, \\ \mathcal{U}_3\mathcal{U}_1 = -\mathcal{U}_1\mathcal{U}_3 = \mathcal{U}_2, \\ \mathcal{U}_2\mathcal{U}_3 = -\mathcal{U}_3\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_1 \end{cases}$$

ヲ満足スル．スナハチ四元体ノ単位 i, j, k ト同ジ関係式ヲ満足スルノデアル．然ルニ $n > 4$ ハ許サレナイ．何トナレバ $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$ ノ他ニ $\mathcal{U}_4$ ガアッタトシテ

$$V = \mathcal{U}_4(\mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3)/\sqrt{2}$$

トオケバ V モ亦 unitary デ $V^2 = -1$ ヲ満足シ，而モ V ハ $\mathcal{U}_1$ ト可換デアル．故ニ $A = V\mathcal{U}_1$ トオケバ $A^* = A$ デ且 $A^2 = 1$ デアル．$A^* = A$ ナルコトカラ A ハ $\mathbb{Z}$ ニ含マレル事ガ分ル．然ルニ

$$A = V\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_4(\mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_3)/\sqrt{2}$$

デアル．故ニ両辺ニ $\mathcal{U}_4^* = -\mathcal{U}_4$ ヲ掛ケレバ

$$A\,\mathcal{U}_4 = (\mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_3)/\sqrt{2}$$

従ッテ

$$\sqrt{2}\,A\,U_4\varphi_0 = U_2\varphi_0 - U_3\varphi_0$$

コレハ $[\mathbb{Z}U_j\varphi_0]\perp[\mathbb{Z}U_k\varphi_0]$ $(j\neq k)$ ナルコトニ矛盾スル ——.

コレデ $n>1$ ナラバ $n=4$ デ

$$\mathbb{M} = \mathbb{Z} + U_1\mathbb{Z} + U_2\mathbb{Z} + U_3\mathbb{Z}$$

ナルコトガ分ッタ. $\mathbb{M}$ ハスナハチ"$\mathbb{Z}$ ノ上ノ四元環"デアル。

$C(\mathbb{M})$ カラ任意ノ *element* A^C ヲトッテ $f=A^C\varphi_0$ ヲ作レバ $a_f(\lambda)$ ハ有界デアル. 従ッテ *lemma* 2.2 ニヨッテ

$$A^C\varphi_0 = A\varphi_0, \qquad A\in\mathbb{M}$$

ト表ヘサレル. $\mathbb{M}$ ト $C(\mathbb{M})$ ノ関係ハ對稱デアルカラ, 逆ニ $A\in\mathbb{M}$ ヲ任意ニトレバ $A\varphi_0$ ハ $A^C\varphi_0$, $A^C\in\mathbb{M}^C$ ト表ハサレル. $A^C\varphi_0=A\varphi_0$ ナル関係ニヨッテ $A\in\mathbb{M}$ ト $A^C\in\mathbb{M}^C$ ガ一對一ニ對應スルノデアル. コノ對應ハ而モ

$$AB\varphi_0 = AB^C\varphi_0 = B^CA\varphi_0 = B^CA^C\varphi_0$$

カラ明カナル如ク逆同型對應デアル. 故ニ

$$C(\mathbb{M}) = \mathbb{Z} + U_1^C\mathbb{Z} + U_2^C\mathbb{Z} + U_3^C\mathbb{Z}$$

デアル. $U_j^C\varphi_0=\varphi_j$ ハ *unitary* デアルカラ U_j^C ハ *unitary* デナケレバナラヌ. 一方 $\mathbb{M}^C$ ガ $\mathbb{M}$ ニ逆同型

ナルコトカラ，$(U_j^c)^2=-1$ ナルコトガ知ラレル．従ッテ

$$(U_j^c)^*=-U_j^c$$

コレヨリ，$\mathbb{Z}$ ガ hermitic operator ノミヨリ成ルコトニ注意スレバ

$$(A^*)^c=(A^c)^*$$

ナルコトガ分ル．逆同型對應 $A\to A^c$ ハスナハチ $*$ ヲ保存スルノデアル。

$[\mathbb{Z}\varphi_0]$ ハ $\mathfrak{h}_\Omega$ ニ isomorphic デアッテ，$[\mathbb{Z}\varphi_0]=\mathfrak{h}_\Omega$ ト考ヘレバ，$Z=\int \xi(\lambda)E(d\lambda)$ デ表ハサレル operator Z ハ

$$Z=\xi(\lambda)\times$$

ト表ハサレル．一般ニ measure space Ω ガ與ヘラレタトキ $\mathfrak{h}_\Omega$ ノ $\xi(\lambda)\times$ ナル形ノ operator 全体ノ作ル ring ヲ $\mathbb{A}_\Omega$ ト書クコトニシヨウ。

然ルトキハ

$$\mathbb{M}=\mathbb{A}_\Omega+U_1\mathbb{A}_\Omega+U_2\mathbb{A}_\Omega+U_3\mathbb{A}_\Omega,$$

$$C(\mathbb{M})=\mathbb{A}_\Omega+U_1^c\mathbb{A}_\Omega+U_2^c\mathbb{A}_\Omega+U_3^c\mathbb{A}_\Omega$$

デアッテ，$\mathfrak{h}$ ハ $\mathfrak{h}=\sum\oplus U_j[\mathbb{Z}\varphi_0]$ カラ明ラカナル如ク

$$\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_\Omega\oplus U_1\mathfrak{h}_\Omega\oplus U_2\mathfrak{h}_\Omega\oplus U_3\mathfrak{h}_\Omega$$

ト表ハサレル．$g \in \mathfrak{H}_\Omega$ トスレバ u_j^c ト $u_k g$ ノ積ノ法則ハ明ラカニ

$$u_j^c u_k g = u_k u_j g$$

デ與ヘラレル．u_j^c ヲ $\mathfrak{H}$ ノ element ヘ"左カラ"掛ケルコトハ u_j ヲ"右カラ"掛ケルコトニ外ナラナイノデアル．四元単位 u_1, u_2, u_3 ヲ i, j, k デ表ハセバ以上ノ結果ハ次ノ如クナル。

定理14．$\mathfrak{H}$ ヲ實 Hilbert 空間トシ，$\mathfrak{H}$ ノ operator ring $\mathbb{M}$ 及ビソノ commutator $C(\mathbb{M})$ ガ共ニ I_1 型ニ屬スルトスル．スルト $\mathfrak{H}$ ハ $\mathbb{M}$ ト $C(\mathbb{M})$ ニ關シテ

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^{(r)} \oplus \mathfrak{H}^{(q)}$$

ノ形ニ分解サレ，コレニヨッテ $\mathbb{M}$, $C(\mathbb{M})$ 及ビ center $\mathbb{Z}$ ハ

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}^{(r)} \oplus \mathbb{M}^{(q)}$$

$$C(\mathbb{M}) = C(\mathbb{M})^{(r)} \oplus C(\mathbb{M})^{(q)},$$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{(r)} \oplus \mathbb{Z}^{(q)}$$

ノ形ニ分タレル．[6] 第一ノ部分 $\mathfrak{H}^{(r)}$ ニ於テハ Ω ヲ $\mathbb{Z}^{(r)} = A_\Omega$

---

6) 一般ニ $\mathfrak{H} = \sum \oplus \mathfrak{M}_j$ ノトキ，各 $\mathfrak{M}_j$ ノ projection P_j ガ $\mathbb{M}$ ノ各 element ト可換ナラバ，$\mathfrak{H} = \sum \oplus \mathfrak{M}_j$ ナル分解ヲ $\mathbb{M}$ ニ關スル分解トイフコトニスル。

ナル measure space トスレバ

$$\mathfrak{H}^{(r)} = \mathfrak{H}_{\Omega},\quad \mathbb{M}^{(r)} = C(\mathbb{M})^{(r)} = \mathbb{Z}^{(r)} = \mathbb{A}_{\Omega}$$

デアル. 第二ノ部分 $\mathfrak{H}^{(q)}$ デハ $\mathbb{Z}^{(q)} = \mathbb{A}_{\Omega}$ トスレバ

$$\mathfrak{H}^{(q)} = \mathfrak{H}_{\Omega} \oplus i\,\mathfrak{H}_{\Omega} \oplus j\,\mathfrak{H}_{\Omega} \oplus k\,\mathfrak{H}_{\Omega},$$

$$\mathbb{M}^{(q)} = \mathbb{A}_{\Omega} + i\,\mathbb{A}_{\Omega} + j\,\mathbb{A}_{\Omega} + k\,\mathbb{A}_{\Omega}$$

デアッテ, $C(\mathbb{M})^{(q)}$ ハ i^{C}, j^{C}, k^{C} ヲ

$$i^{C} f = f i,\quad f \in \mathfrak{H}^{(q)} \text{ 等}$$

ト定義スレバ

$$C(\mathbb{M})^{(q)} = \mathbb{A}_{\Omega} + i^{C}\mathbb{A}_{\Omega} + j^{C}\mathbb{A}_{\Omega} + k^{C}\mathbb{A}_{\Omega}$$

ト表ハサレル. 但シコヽデ i, j, k ハ四元単位デアッテ, operator トシテハ unitary ナルモノトスル。

コノ結果ヲ前節ノ結果ニ合セレバ次ノ定理ガ得ラレル.

定理15. 實 Hilbert 空間ニ於ケルI型ノ operator ring $\mathbb{M}$ ハ次ノ如キ構造ヲモツ: 先ヅ $\mathfrak{H}$ ハ $\mathbb{M}$ ト $C(\mathbb{M})$ ニ関シ

$$\mathfrak{H} = \sum\sum \oplus\, \mathfrak{H}^{(r)}(n, m) \oplus \sum\sum \oplus\, \mathfrak{H}^{(q)}(n, m)$$

ノ形ニ分解サレ, コレニ從ッテ $\mathbb{M}$, $C(\mathbb{M})$ 及ビ $\mathbb{Z}$ ハ両側イデアルノ直和ニ分タレル.

$$\begin{cases} \mathbb{M} = \sum\sum \oplus \mathbb{M}^{(r)}(n, m) \oplus \sum\sum \oplus \mathbb{M}^{(q)}(n, m) \\ C\mathbb{M} = \sum\sum \oplus C(\mathbb{M})^{(r)}(n, m) \oplus \sum\sum \oplus C(\mathbb{M})^{(q)}(n, m), \\ \mathbb{Z} = \sum\sum \oplus \mathbb{Z}^{(r)}(n, m) \oplus \sum\sum \oplus \mathbb{Z}^{(q)}(n, m). \end{cases}$$

コノ一ツノ直和因子 $\mathfrak{h}^{(r)}(n, m)$ ヲトレバ

$$\begin{cases} \mathfrak{h}^{(r)}(n, m) = n \times \bar{\mathfrak{h}}^{(r)} \times m, \qquad \bar{\mathfrak{h}}^{(r)} = \mathfrak{h}_{\Omega^{(r)}}(n, m), \\ \mathbb{M}^{(r)}(n, m) = n \times \bar{\mathbb{Z}}^{(r)}, \\ C(\mathbb{M})^{(r)}(n, m) = \bar{\mathbb{Z}}^{(r)} \times m, \qquad \bar{\mathbb{Z}}^{(r)} = \mathbb{A}_{\Omega^r}(n, m) \\ \mathbb{Z}(n, m) \cong \bar{\mathbb{Z}}^{(r)}, \end{cases}$$

$\mathfrak{h}^{(q)}(n, m)$ ヲ考ヘレバ

$$\mathfrak{h}^{(q)}(n, m) = n \times \bar{\mathfrak{h}}^{(q)} \times m,$$

$$\bar{\mathfrak{h}}^{(q)} = \mathfrak{h}_{\Omega} \oplus i\,\mathfrak{h}_{\Omega} \oplus j\,\mathfrak{h}_{\Omega} \oplus k\,\mathfrak{h}_{\Omega},$$

$$\mathbb{M}^{(q)}(n, m) = n \times \bar{\mathbb{M}}^{(q)},$$

$$\bar{\mathbb{M}}^{(q)} = \mathbb{A}_{\Omega} + i\mathbb{A}_{\Omega} + j\mathbb{A}_{\Omega} + k\mathbb{A}_{\Omega},$$

$$C(\mathbb{M})^{(q)}(n, m) = C(\bar{\mathbb{M}})^{(q)} \times m,$$

$$C(\bar{\mathbb{M}})^{(q)} = \mathbb{A}_{\Omega} + i^c\mathbb{A}_{\Omega} + j^c\mathbb{A}_{\Omega} + k^c\mathbb{A}_{\Omega},$$

$$\mathbb{Z}^{(q)}(n, m) = \mathbb{Z}^{(q)}, \qquad \bar{\mathbb{Z}}^{(q)} = \mathbb{A}_{\Omega}$$

デアル。

——實 Hilbert 空間ノＩ型ノ operator ring ハ abelian ring $\mathbb{A}_{\Omega}$ ノ上ノ行列環ト $\mathbb{A}_{\Omega}$ ノ上ノ

行列環ノ直和ニ isomorphic ニナルノデアル。

3.3. I型ノ環ノスペクトル分解. I型ノ環ニ関スルスペクトル分解定理ハ定理13或ハ定理15カラ容易ニ導ビカレル。初メニ二三ノ定義ヲ述ベル―― Ω ヲ (separable ナル) measure space, $\mathfrak{H}$ ヲ unitary space トスル。

定義3.1. Ω デ定義サレタ $\mathfrak{H}$ ノ値ヲトル函数 $f(\lambda)$ ハスベテノ $\varphi \in \mathfrak{H}$ ニ對シテ $(f(\lambda)\ \varphi)$ ガ可測ナルトキ λ 可測函数デアルトイフ。

$\mathfrak{H}$ ノ完全正規直交系ヲ φ_j トスレバ

$$(f(\lambda)\ g(\lambda)) = \sum (f(\lambda)\ \varphi_j)\ \overline{(g(\lambda)\ \varphi_j)}$$

デアルカラ, $f(\lambda)$ ト $g(\lambda)$ ガ可測ナラバ $(f(\lambda)\ g(\lambda))$ モ可測デアル. 特ニ $f(\lambda)$ ガ可測ナラバ $\|f(\lambda)\|$ モ可測デアル。

$$\int_\Omega \|f(\lambda)\|^2 d\lambda < +\infty$$

ナル可測函数 $f = f(\lambda)$ ノ全体ハ明ラカニ

$$(f,\ g) = \int_\Omega (f(\lambda)\ g(\lambda))\, d\lambda$$

ヲ内積トスル Hilbert 空間ヲ作ル.

定義3.2 $\int_\Omega \|f(\lambda)\|^2 d\lambda < +\infty$ ナル $f(\lambda)$ ノ作ル

Hilbert 空間ヲ

$$\mathfrak{H} = \int_{\Omega} \oplus \mathfrak{h} \, d\lambda$$

デ表ハス。

$\mathfrak{h}$ ノ有界ナ operator 全体ノ作ル環ヲ $\mathbb{B}(\mathfrak{h})$ デ表ハス。

定義 3.3　Ω デ定義サレタ $\mathbb{B}(\mathfrak{h})$ ノ値ヲトル函数 $A(\lambda)$ ハスベテノ $\varphi, \psi \in \mathfrak{h}$ ニ對シテ $(A(\lambda)\varphi, \psi)$ ガ可測ナルトキ入ノ可測函数デアルトイフ。

容易ニ確カメラレル如ク，$A(\lambda)$ ガ可測ナラバ $(A(\lambda))^*$ モ可測，$A(\lambda)$ ト $f(\lambda)$ ガ可測ナラバ $A(\lambda)f(\lambda)$ モ可測，$A(\lambda)$ ト $B(\lambda)$ ガ可測ナラバ $\alpha A(\lambda) + \beta B(\lambda)$，$A(\lambda)B(\lambda)$ 等モ可測デアル．又一般ニ operator A ノ uniform topology ノ意味ノ norm ヲ $\|A\|$ ト書クコトニスレバ，$\|A(\lambda)\|$ ハ $\mathfrak{h}$ ノ everywhere dense set φ_ν ヲ用ヒテ

$$\|A(\lambda)\| = \sup_{\nu} \frac{\|A(\lambda)\varphi_\nu\|}{\|\varphi_\nu\|}$$

ト書カレル．故ニ $\|A(\lambda)\|$ モ入ノ可測函数デアル．吾々ハ $\|A(\lambda)\|$ ガ有界ナルトキ函数 $A(\lambda)$ ハ有界デアルトイフコトニスル．$A = A(\lambda)$ ガ有界可測ナルトキ $f = f(\lambda) \in \int \oplus \mathfrak{h} d\lambda$ ニ對シテ

$$Af = A(\lambda) f(\lambda)$$

ニヨッテ Af ヲ定義スレバ，A ハ $\int \oplus \mathfrak{h} \, d\lambda$ ノ有界ナ

operatorナル．コノトキ而ニ

$$\|A\| = \underset{\lambda\in\Omega}{\mathrm{ess.\ max}}\|A(\lambda)\|$$

デアル．何トナレバ先ヅ $\|A\| \leqq \mathrm{ess.\ max}\|A(\lambda)\|$ ハ明ラカデアル。

逆ニ $f = f(\lambda)$ トシテ

$$f(\lambda) = \begin{cases} \varphi_\nu & (\lambda \in \Gamma \text{ ノトキ}) \\ 0 & (\lambda \notin \Gamma \text{ ノトキ}) \end{cases}$$

シトレバ

$$\|Af\|^2 = \int_\Gamma \|A(\lambda)\varphi_\nu\|^2 d\lambda \leqq \|A\|^2 \|\varphi_\nu\|^2 \nu(\Gamma)$$

故ニ零集合ヲ除ケバ $\|A(\lambda)\varphi_\nu\| \leqq \|A\|\|\varphi_\nu\|$ デアル．従ッテ φ_ν トシテ $\mathfrak{h}$ デ everywhere dense ナル可附番集合ヲトッテ見レバ

$$\mathrm{ess.\ max.}\|A(\lambda)\| \leqq \|A\|$$

トルコトガ分ル．———

$\mathbb{M}$ ヲ $\mathfrak{H}$ ノI型ノoperator ring トシ，$\mathfrak{H}$ ハ可分ナ Hilbert空間デアルトスル．定理13ニヨレバ $\mathfrak{H}$ ハ $\mathbb{M}$ ト $C(\mathbb{M})$ ニ関シテ $\sum\oplus\mathfrak{H}(n,m)$ ノ形ニ分解サトル．スペクトル分解ヲ論ズルニハ各 $\mathfrak{H}(n,m)$ ノ前々ニ扱ヘバヨイカラ，$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(n,m)$ ト考ヘル．

此ノトキハ

$$\begin{cases} \mathfrak{h}_y = n \times \mathfrak{h}_{y\Omega} \times m, \\ \mathbb{M} = n \times \mathbb{A}_\Omega, \\ C(\mathbb{M}) = \mathbb{A}_\Omega \times m, \\ \mathbb{Z} \cong \mathbb{A}_\Omega \end{cases}$$

デアル．$\mathfrak{h}_y$ ノ element ハ

$$f = (\bar{f}_{jp}), \quad \bar{f}_{jp} = f_{jp}(\lambda) \in \mathfrak{h}_{y\Omega}$$

ノ如ク表ハサレル．

$$\sum_j \sum_p \int_\Omega |f_{jp}(\lambda)|^2 d\lambda = \|f\|^2 < +\infty$$

デアル．故ニ (n, m) 型ノ複素行列 $x = (x_{jp})$ デ

$$\sum \sum |x_{jp}|^2 < +\infty$$

ナルモノノ全体カラ成ル unitary 空間[7] ヲ $\mathfrak{b}$ トスレバ，λ ノ零集合ヲ除イテ行列 $(f_{jp}(\lambda))$ ハ $\mathfrak{b}$ ニ属スル．従ッテ

$$f(\lambda) = (f_{jp}(\lambda))$$

トオケバ $f(\lambda)$ ハ $\mathfrak{b}$ ノ値ヲトル λ ノ可測函数ト考ヘラレル．而モ

$$\|f\|^2 = \int_\Omega \|f(\lambda)\|^2 d\lambda$$

デアル．故ニ f ハ $\int \oplus \mathfrak{b}\, d\lambda$ ノ element $f(\lambda)$ デアルト考ヘラレ，従ッテ $f = f(\lambda)$ トオケバ

---

7) 内積 (x, y) ハ $(x, y) = \mathrm{trace}\, y^* x$ デ與ヘラレルトスル．

$$\mathfrak{h}_y = \int_{\Omega} \oplus\, \mathfrak{b}\, d\lambda$$

トナル．コレハスナハチ $\mathfrak{h}_y$ ノスペクトル分解ニ他ナラナイ．行列空間 $\mathfrak{b}$ ハ，複素数体ヲKト書クコトニスレバ

$$\mathfrak{b} = n \times K \times m$$

ト表ハサレル。

次ニ $\mathbb{M}$ ヲ考ヘル．$\mathbb{M}$ ニ属スル任意ノ operator A ハ

$$A = (\bar{A}_{jk}\,\delta_{pq}), \qquad \bar{A}_{jk} = a_{jk}(\lambda) \in \mathbb{A}_{\Omega}$$

ト表ハサレル　$a_{jk}(\lambda)$ ハ λ ノ零集合ヲ除ケバ，スベテノ有限個ノ数 x_{jp} ニ対シテ

$$(*) \quad \sum_j \sum_p \Big|\sum_k a_{jk}(\lambda)\, x_{kp}\Big|^2 \leqq \|A\|^2 \sum_j \sum_p |x_{jp}|^2$$

ヲ満足スル．何トナレバ $f = (f_{jp}(\lambda))$ ヲ

$$f_{jp}(\lambda) = \begin{cases} x_{jp} & (\lambda \in \Gamma \text{ ノトキ}) \\ 0 & (\lambda \notin \Gamma \text{ ノトキ}) \end{cases}$$

トオケバ，$\|Af\| \leqq \|A\|\,\|f\|$ カラ

$$\sum_j \sum_p \int_{\Gamma} \Big|\sum_k a_{jk}(\lambda)\, x_{kp}\Big|^2 d\lambda$$

$$\leqq \|A\|^2 \sum_j \sum_p |x_{jp}|^2 \; m(\Gamma)$$

ナルコトガ分ル．従ツテ x_{jp} ヲ一組定メテオケバ零集合 $\Gamma(x_{jp})$ ガ定マッテ $\lambda \notin \Gamma(x_{jp})$ ニ対シテハ $(*)$ ガ成

立ツ．コノ $\Gamma(x_{jp})$ ヲ用ヒテ Γ_0 ヲスベテノ有限個ノ有理數ノ組 x_{jp} ニ對スル $\Gamma(x_{jp})$ ノ和ト定義スル．然ルトキハ Γ_0 ハ明ラカニ零集合デアッテ，極限ヲトレバ明ラカナル如ク，$\lambda \notin \Gamma_0$ ニ對シテハ常ニ（＊）ガ成立スル――．

（＊）カラ，λ ノ零集合ヲ除ケバ $x = (x_{jp}) \in \mathfrak{H}$ ノトキ

$$\sum_k a_{jk}(\lambda)\, x_{kp}$$

ハ絶對收斂シテ

$$\sum_j \sum_p \Big|\sum_k a_{jk}(\lambda)\, x_{kp}\Big|^2 \leqq \|A\|^2 \sum_j \sum_p |x_{jp}|^2$$

ナル事ガ分ル．從ッテ

$$x = (x_{jp}) \rightarrow A(\lambda)x = \Big(\sum_k a_{jk}(\lambda)\, x_{kp}\Big)$$

ニヨッテ $\mathfrak{H}$ ノ norm ガ $\|A\|$ ヲ越エナイ linear operator $A(\lambda)$ ガ定義サレル．$A(\lambda)$ ハ明ラカニ λ ノ可測函數デ各 $A(\lambda)$ ハ $\mathfrak{H} = n \times K \times m$ ノ operator ring $n \times K$ ニ屬スル．$\mathfrak{H}_y = \int \oplus\, \mathfrak{H}\, d\lambda$ ト考ヘテ $f \in \mathfrak{H}_y$ ヲ $f = f(\lambda)$ ト表ハセバ，明ラカニ

$$Af = Af(\lambda) = A(\lambda)\, f(\lambda)$$

デアル．スナハチ $A = A(\lambda)$ デアル．逆ニ $A(\lambda) \in n \times K$ ナル有界可測函數 $A = A(\lambda)$ ハ $\mathfrak{H}_y = \int \oplus\, \mathfrak{H}\, d\lambda$ ノ operator ト考ヘタトキ $\mathbb{M}$ ニ屬スル operator ヲ表ハスコトハ容易ニ確カメラレル．$\mathbb{M}$ ハスナハチ $A(\lambda) \in n \times K$ ナル有界可測函數ノ全體カラ成ルノデアル．コノコトヲ吾々ハ記号的ニ

$$\mathbb{M}=\int_{\Omega}\oplus(n\times K)\,d\lambda$$

デ表ハスコトニスル。

定理16（I型環ノスペクトル分解）. $\mathfrak{H}$ ヲ複素 Hilbert 空間, $\mathbb{M}$ ヲ $\mathfrak{H}$ ノI型ノ operator ring トシ, $C(\mathbb{M})$ ヲソノ commutator トスル. 然ルトキハ $\mathfrak{H}$ ハ $\mathbb{M}$ ト $C(\mathbb{M})$ ニ關シテ

$$\mathfrak{H}=\sum_{n}\sum_{m}\oplus\int_{\Omega(n,m)}\oplus(n\times K\times m)\,d\lambda$$

ノ形ニ分解サレ, コレニ從ッテ $\mathbb{M}$ ト $C(\mathbb{M})$ ハ

$$\begin{cases}\mathbb{M}=\displaystyle\sum_{n}\sum_{m}\oplus\int_{\Omega(n,m)}\oplus(n\times K)\,d\lambda\\[2ex] C\mathbb{M}=\displaystyle\sum_{n}\sum_{m}\oplus\int_{\Omega(n,m)}\oplus(K\times m)\,d\lambda\end{cases}$$

ノ如ク分解サレル.

コノ定理16ノ結果ハ, $\Omega=\sum\sum\Omega(n,m)$ トオキ, $\lambda\in\Omega$ ニ對シテ $\mathfrak{H}_\lambda$, $\mathbb{M}_\lambda$ 及ビ $C(\mathbb{M}_\lambda)$ ヲ, $\lambda\in(n,m)$ ノトキ

$$\begin{cases}\mathfrak{H}_\lambda=n\times K\times m\\ \mathbb{M}_\lambda=n\times K\\ C(\mathbb{M}_\lambda)=K\times m\end{cases}$$

ト定義スレバ, $\int\oplus$ ノ中ニ $\sum\sum\oplus$ ヲ含メテ形式的ニ

$$\begin{cases} \mathfrak{H} = \int_{\Omega} \oplus \, \mathfrak{H}_{\lambda} \, d\lambda \\ \mathbb{M} = \int_{\Omega} \oplus \, \mathbb{M}_{\lambda} \, d\lambda \\ C(\mathbb{M}) = \int_{\Omega} \oplus \, C(\mathbb{M})_{\lambda} \, d\lambda \end{cases}$$

ト表ハスコトガ出来ル. 複素 Hilbert 空間ニ於ケル I 型ノ環ハ行列環ノ直積分 —— 連続的直和 —— ニ分解サレルノデアル。

實 Hilbert 空間ニ於ケル I 型環ノスペクトル分解ハ定理 15 カラ導カレル. 結果ヲ言ヘバ

定理17. $\mathfrak{H}$ ヲ實 Hilbert 空間, $\mathbb{M}$ ヲソノ I 型ノ operator ring トスル. 然ルトキハ $\mathfrak{H}, \mathbb{M}, C(\mathbb{M})$ ハ

$$\begin{cases} \mathfrak{H} = \int_{\Omega} \oplus \, \mathfrak{H}_{\lambda} \, d\lambda, & \mathfrak{H}_{\lambda} = n_{\lambda} \times \Xi_{\lambda} \times m_{\lambda}; \\ \mathbb{M} = \int_{\Omega} \oplus \, \mathbb{M}_{\lambda} \, d\lambda, & \mathbb{M}_{\lambda} = n_{\lambda} \times \Xi_{\lambda}; \\ C(\mathbb{M}) = \int_{\Omega} \oplus \, \mathbb{M}_{\lambda}^{c} \, d\lambda, & \mathbb{M}_{\lambda}^{c} = \Xi_{\lambda}^{c} \times m_{\lambda} \end{cases}$$

ノ形ニ分解サレル. 但シココデ Ξ_{λ} ハ實数体又ハ四元数体デアッテ, Ξ_{λ}^{c} ハ Ξ_{λ} ヲ Ξ_{λ} 自身ノ operator ノ作ル体ト考ヘタトキノ Ξ_{λ} ノ commutator ヲ現

ハス。

實 Hilbert 空間ニ於ケル I 型ノ環ハ、スベテ實數體及ビ四元數体ノ上ノ行列環ノ直積分ニ分解サレル。正ニ豫期セラレル結果デアル。——

一般ノ環 $\mathbb{M}$ ガ與ヘラレタトキ、ソノ center ヲ $\mathbb{Z}$ トスレバ、$\mathbb{M}$ ハ I 型環 $C(\mathbb{Z})$ ノ部分環トナル。故ニ一般ノ環モ、ソノ center $\mathbb{Z}$ ヲ有界可測函數ノ環 $(z(\lambda);\ \lambda\in\Omega)$ トシテ表現シタトキ、行列環 $\mathbb{M}_\lambda$ ノ値ヲトル有界可測函数 $A(\lambda)$ ノ作ル環トシテ表現サレルノデアル。

§4. 連續函數ニヨル表現

コノ§デハ I 型ノ環ヲ既約環ノ値ヲトル連續函數ノ環トシテ表現スルコトヲ論ズル。一般ノ環 $\mathbb{M}$ ガ與ヘラレタトキ、ソノ center ヲ $\mathbb{Z}$ トスレバ $\mathbb{M}$ ハ I 型ノ環 $C(\mathbb{Z})$ ニ含マレル。從ツテ一般ノ環モ連續函數ノ環トシテ表現サレル事ガ分ル。

4.1. 可測函數ノ連續函數ニヨル表現. Ω ヲルベッグ測度 m ノ定義サレタ空間トシ $m(\Omega)<+\infty$ トスル。Ω ノ可測集合ノ作ル Boole 代數ヲ (Γ)、零集合ノ作ル (Γ) ノ sub-algebra ヲ (N) トシ $(F)=(\Gamma)/(N)$ トオク。$(\overline{F})=(\Gamma)/(N)$ ハ一ツノ totally disconnected ナ bicompact 空間ノ open 且ツ closed ナ部分集

合ノ作ル algebra ニ同型デアル．吾々ハコノ空間ヲ $\mathfrak{M}$ デ表ハシ，$\mathfrak{M}$ ノ点ヲ p, q 等，ソノ open 且ツ closed ナ部分集合ヲ $\mathfrak{L}$ 等ト書ク。

$$(\bar{\Gamma}) = (\Gamma)/(N) \cong (\mathfrak{L})$$

ニヨッテ $\mathfrak{L}$ ニ對シテ $\Gamma \in (\bar{\Gamma})$ ガ mod (N) デ一義ニ定マル．コレヲ

$$\Gamma = \Gamma(\mathfrak{L})$$

デ表ハス．Ω ノ Lebesgue 測度 m ヲ用ヒテ $\mathfrak{M}$ ノ任意ノ部分集 $\mathfrak{A}$ ニ對シテ

$$m^*(\mathfrak{A}) = \inf_{\mathfrak{L} \supseteq \mathfrak{A}} m(\Gamma(\mathfrak{L}))$$

ニヨッテ $m^*(\mathfrak{A})$ ヲ定義スレバ m^* ハ容易ニ確メラレル如ク Carathéodory 外測度デアッテ，$\mathfrak{L}$ ハスベテ m^*-可測デ

$$m^*(\mathfrak{L}) = m(\Gamma(\mathfrak{L}))$$

デアル．從ッテ m^*-可測集合 $\mathfrak{A}$ ニ對シテ

$$m(\mathfrak{A}) = m^*(\mathfrak{A})$$

トオケバ，m ハ $\mathfrak{M}$ ニ於ケル Lebesgue 測度デアッテ $m(\mathfrak{L})$ ハ $m(\Gamma(\mathfrak{L}))$ ト一致スル．而モ $\mathfrak{M}$ ニ於テハ任意ノ可測集合 $\mathfrak{A}$ ニ對シテコレト零集合ヲ除イテ一致スル open 且ツ closed ナ集合 $\mathfrak{L}$ ガ存在スル．スナハチ $\mathfrak{M}$ ニ於テ作ッタ Boole 代數：

(可測集合)/(零集合)

ハ $(\mathfrak{L})$ ト同型ニナルノデアル。

R ノ compact metric space トスル．一般ニ measure space Ω デ定義サレタ R ノ値ヲトル函數 $\varphi(\lambda)$ ハ R ノスベテノ Boole 集合 B ニ對シテ $\varphi^{-1}(B)$ ガ可測ナルトキ可測函數デアルト言ハレル．ソシテ零集合ヲ除イテ一致スル二ツノ可測函數ヲ同一ノモノト見做スナラバ，可測函數ハ R ノ Borel 集合全体ノ作ル algebra (B) カラ $(\overline{\Gamma}) = (\Gamma)/(N)$ ヘノ束準同型對應：

$$B \longrightarrow \overline{\varphi^{-1}(B)}$$

ニヨッテ定メラレル．故ニ，Ω ニ於ケル可測函數 $\varphi(\lambda)$ ト $\mathfrak{M}$ ニ於ケル可測函數 $\Phi(P)$ ガ零集合ヲ除イテ考ヘレバ

$$\varphi^{-1}(B) = \Gamma(\Phi^{-1}(B)) \qquad (B \in (B))$$

ナル關係ヲ媒介トシテ一對一ニ對應スル．而モコノ對應ニ際シテハ明ラカニ函數ノ相互ノ距離ガ保存サレル：スナハチ $\varphi_\nu = \Phi_\nu$ ガ對應シテヰルトキ R ノ距離ヲ ρ デ表ハスナラバ

$$\operatorname*{ess.max}_{\lambda} \rho(\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda))$$

$$= \operatorname*{ess.max}_{P} \rho(\Phi_1(P), \Phi_2(P))$$

ガ成立スル．然ルニ

Lemma 1.1. $\mathfrak{M}$ ニ於テハ如何ナル可測函數

$\Phi(P)$ ニ對シテモコレト零集合ヲ除イテ一致スル連續函數が存在スル。

何トナレバ, $\Phi(P)$ ハ compact 空間ノ値ヲトル可測函數デアルカラ"階段可測函數"$\Phi_\nu(P)$ デ一様ニ近似セラレル. 然ルニ $\mathfrak{M}$ ニ於テハ任意ノ可測集合ハ零集合ヲ除ケバ open 且 closed ナ集合ト一致スル. 故ニ $\Phi_\nu(P)$ ニ対シテハコレト零集合ヲ除イテ一致スル連続函數 $\Psi_\nu(P)$ が存在スル. $\Psi_\nu(P)$ ハ零集合ヲ除ケバ $\Phi(P)$ ニ一様ニ收斂スル. 從ツテ $\Psi_\nu(P)$ ハ連續デアルカラ到ル所一様收斂デナケレバナラナイ. ソコデ

$$\Psi(P)=\lim_{\nu\to\infty}\Psi_\nu(P)$$

トオク. 然ルトキハ $\Psi(P)$ ハ明ラカニ連續デアッテ, 零集合ヲ除ケバ $\Phi(P)$ ハ $\Psi(P)$ ト一致スル ——.

故ニ:

定理18. 零集合ヲ除イテ一致スル函數ヲ同一ト考ヘレバ, measure space Ω ノ上ノ可測函數 $\phi(\lambda)$ ト bi-compact space $\mathfrak{M}$ ノ上ノ連續函數 $\Phi(P)$ が

$$\phi^{-1}(B)=\Gamma(\Phi^{-1}(B))$$

ナル關係ヲ媒介トシテ一對一ニ對應スル. $\phi_\nu(\lambda)=\Phi_\nu(P)$ が對應シテヰルトスレバ

$$\underset{\lambda}{\mathrm{ess.\,max}}\ \rho(\phi_1(\lambda),\phi_2(\lambda))=\max_P \rho(\Phi_1(P),\Phi_2(P))$$

デアル。

コノトキ，$\lim_{\nu\to\infty}\phi_\nu(\lambda)=\phi(\lambda)$ デアルガ収斂ガ必ズシモ一様デナイ場合ニハ，對應スル $\Phi_\nu(P)$ ト $\Phi(P)$ ノ関係ハ如何ニナルデアラウカ？一般ニ $\lim\phi_\nu(\lambda)=\phi(\lambda)$ ナルトキハ，任意ノ $\varepsilon\,(>0)$ ニ對シテ $m(\Gamma)<\varepsilon$ ナル Γ ヲ適當ニ選ベバ $\Omega-\Gamma$ デハ $\phi_\nu(\lambda)$ ハ $\phi(\lambda)$ ニ一様ニ収斂スル。コノ様ナ Γ ヲ一ツ定メヲ對應スル $(\mathfrak{L})$ ノ element ヲ $\mathfrak{L}(\varepsilon)$ トスル．然ルトキハ $\mathfrak{M}-\mathfrak{L}(\varepsilon)$ デハ $\Phi_\nu(P)$ ハ $\Phi(P)$ ニ一様ニ収斂スル．從ッテ例ヘバ

$$\mathfrak{a}_0=\prod_{j=1}^{\infty}\mathfrak{L}\left(\frac{1}{2^j}\right)$$

トオケバ，$m(\mathfrak{a}_0)=0$ デアッテ $\mathfrak{M}-\mathfrak{a}_0$ デハ $\Phi_\nu(P)$ ハ $\Phi(P)$ ニ収斂スル．スナハチ $\phi_\nu(\lambda)$ ガ $\phi(\lambda)$ ニ収斂スルトキハ對應スル $\Phi_\nu(P)$ ハ零集合ヲ除ケバ對應スル $\Phi(P)$ ニ収斂スルノデアル。

4.2. 以上ノ結果ヲ用ヒテ I 型環ノ連續函数ニヨル表現ヲ論ジヨウ。簡単ノタメ

$$\mathfrak{H}=\int_\Omega\oplus\,\mathfrak{G}\,d\lambda,\qquad \mathfrak{G}=n\times K\times m$$

トシ，$\mathfrak{H}$ ニ於ケル I 型環

$$\mathbb{M}=\int_\Omega\oplus(n\times K)\,d\lambda$$

ヲ考察スル．$\overline{\mathbb{M}}=n\times K$ トオキ，$\overline{\mathbb{M}}$ ノ element ヲ

$\bar{A}$, $\bar{B}$ 等ト書クコトニスレバ, $\mathbb{M}$ ハスナハチ Ω 上ノ
$\bar{\mathbb{M}}$ ノ値ヲトル有界可測函数全体カラ成ル環デアル. 然ルニ $\bar{\mathbb{M}}$ ノ閉球:

$$\mathfrak{S}(r) = \{\bar{A};\ \|\bar{A}\| \leq r,\ \bar{A} \in (\bar{\mathbb{M}})\}$$

ハ weak topology ニ関シテハ compact metric space ヲ作ル。

故ニ定理18ヲ適用スレバ, $\mathbb{M}$ ノ各 element A ニハ bicompact 空間 $\mathfrak{M}$ ノ上ノ連續函数 A(P) ガ一對一ニ對應スルコトガ分ル. コノ對應ニ於テ $\mathbb{M}$ ニ於ケル代数的演算ハ如何ニナルデアラウカ? 一般ニ A(P) 及ビ B(P) ガ weak topology ニ関シテ連続ナルトキハ $A^*(P)$, $\alpha A(P)+\beta B(P)$ ハ連続デアルガ $A(P)\cdot B(P)$ ハ $n=\infty$ ノトキハ必ズシモ連續ニナラナイ。$n=\infty$ ノ場合ニハ $\mathfrak{M}$ ノ上ノ $\bar{\mathbb{M}}$ ノ値ヲトル連續函数ノ全体ハ環ヲ作ラナイノデアル. 然シ, $\mathfrak{H}$ ノ完全正規直交系ヲ φ_j トスレバ任意ノ $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}$ ニ對シテ

$$(A(P)B(P)\varphi,\ \psi) = \sum_j (A(P)\varphi_j,\ \psi)(B(P)\varphi,\ \varphi_j)$$

デアルカラ, A(P) B(P) ハ $\mathfrak{M}$ ニ於ケル P ノ可測函数デアル. 従ッテ A(P) B(P) ニ對シテ、コレト零集合ヲ除イテ一致スル連続函数ガ存在シテ唯一通リニ定マル. 吾々ハ

定義. A(P) 及ビ B(P) ガ $\mathfrak{M}$ 上ノ $\bar{\mathbb{M}}$ ノ値ヲトル連續函数ナルトキ, $A(P)\cdot B(P)$ ト零集合ヲ除イテ一

致スル連續函數ヲ $A=A(p)$ ト $B=B(p)$ ノ積ト名付ケ コレヲ $AB=AB(p)$ デ表ハスコトヽスル。

カクノ如クスレバ $\mathfrak{M}$ 上ノ $\overline{M}$ ノ値ヲトル連續函數ノ全体 $\mathfrak{C}$ ガ環トナル事明カデアラウ。$\mathfrak{M}$ ハ

$$A=A(\lambda)\longrightarrow A(p)$$

ナル對應ニヨッテ、コノ意味ノ連續函數ノ環ニ代數的ニ *isomorphic* ニナルノデアル。次ニコレヲ證明シヨウ。

$A\longrightarrow A(p)$ ハ階段可測函數ニ對シテハ明ラカニ代數的同型對應ヲ與ヘル. 從ッテ任意ノ $A=A(\lambda)$ ハ *weak topology* ニ關シテハ階段可測函數デ一様ニ近似セラレルカラ先ヅ $*$, $\alpha\times$ 及ビ $+$ ナル三種ノ演算ニ關シテハ $A\longrightarrow A(p)$ ハ同型對應ヲ與ヘルコトが分ル. 次ニ "積" ヲ考ヘル. $A(p)$ ト $B(p)$ ノ上記ノ意味ノ積 $AB(p)$ ハ $A(p)B(p)$ ト零集合ヲ除イテ一致スル連續函數デアル. 故ニ $AB\longrightarrow AB(p)$ ナルコトヲ示スニハ, スベテノ φ, $\psi\in\mathfrak{H}$ ニ對シテ

$$(A(\lambda)B(\lambda)\varphi,\ \psi)\longrightarrow(A(p)B(p)\varphi,\ \psi)$$

ナルコトヲ言ヘバヨイ. 然ルニ

$$\begin{cases}(A(\lambda)B(\lambda)\varphi,\ \psi)=\sum\limits_j(A(\lambda)\varphi_j,\psi)(B(\lambda)\varphi,\ \varphi_j),\\[2ex](A(p)B(p)\varphi,\ \psi)=\sum\limits_j(A(p)\varphi_j,\ \psi)(B(p)\varphi,\ \varphi_j)\end{cases}$$

デアッテ

$$\sum_{j=1}^{n}(A(\lambda)\varphi_j,\ \psi)(B(\lambda)\varphi,\ \varphi_j)$$

$$\longrightarrow \sum_{j=1}^{n}(A(p)\varphi_j,\ \psi)(B(p)\varphi,\ \varphi_j)$$

ナルコトハ明カデアル．コノ両辺ハ一様ニ有界デアル．故ニコノ $n\to\infty$ ノトキノ極限タル $(A(\lambda)B(\lambda)\varphi,\ \psi)$ ニハ $(A(p)B(p)\varphi,\ \psi)$ ガ對應スル ——．以上ノ結果ヲ定理トシテマトメテオク：

定理19. $\mathfrak{H}=\int_\Omega \oplus(\mathfrak{n}\times K\times \mathfrak{m})\,d\lambda$ ニ於ケル環 $\mathbb{M}=\int_\Omega \oplus(\mathfrak{n}\times K)\,d\lambda$ ハ bicompact ナ空間 $\mathfrak{M}$ ノ上デ定義サレタ $\mathfrak{n}\times K$ ノ値ヲトル weakly continuous function 全体ノ環ト代数的ニ同型ニナル．